MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE **(DGESE)**

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Concours STIC session 2016

Composition : Physique 3 (électricité)

Durée : 3 Heures

- ***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***
- ***Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques qui vous sembleront pertinents). Le correcteur tiendra compte de ces initiatives ainsi que de la qualité de rédaction de la copie.***

Le Sujet est composé de deux parties indépendantes.

Il peut être traité dans un ordre quelconque.

Célérité des ondes dans le vide ou l'air: $c = 3\ 10^8 m\ s^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide ou de l'air: $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} H\ m^{-1}$

Permittivité diélectrique du vide ou de l'air: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\ \pi\ 10^9} F\, m^{-1}$

Partie 1. Onde quasi-monochromatique

Une onde plane progressive monochromatique : $\underline{\Psi}(z,t) = \Psi_0\ e^{j(\omega t - kz)}$ où $j^2 = -1$, d'amplitude Ψ_0 en tout point, de pulsation ω et de vecteur d'onde de module k, se propage à la vitesse $v = \dfrac{\omega}{k}$ dans tout l'espace , la variable z prenant toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty,+\infty[$. Cette onde est mathématiquement acceptable si elle satisfait à l'équation de propagation des ondes et physiquement acceptable si l'énergie $W \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\underline{\Psi}(z,t)\right|^2 dz$ transportée par cette onde à chaque instant est finie.

1-1. L'onde $\underline{\Psi}(z,t)$ est-elle solution de l'équation des ondes ? Vérifie-t-elle la condition énergétique ?

1-2. On construit une nouvelle fonction $\underline{\Psi}'(z,t) = \underline{\Psi}_1(z,t) + \underline{\Psi}_2(z,t)$ en superposant deux ondes planes progressives monochromatiques de fréquences voisines, de même amplitude et se déplaçant ensemble à la même vitesse :

$\underline{\Psi}_1(z,t) = A\, e^{j(\omega_1 t - k_1 z)}$ et $\underline{\Psi}_2(z,t) = A\, e^{j(\omega_2 t - k_2 z)}$ avec

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega \\ \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} k_1 = k_0 - \Delta k \\ k_2 = k_0 + \Delta k \end{cases}$$

a) Montrer que $\underline{\Psi}'(z,t)=\Psi_0'(z,t)\ e^{j(\omega_0 t-k_0 z)}$ en exprimant $\Psi_0'(z,t)$ sous sa forme réelle.

Quelle est l'expression de la vitesse V du maximum de l'amplitude de l'onde résultante $\underline{\Psi}'(z,t)$?

b) L'onde $\underline{\Psi}'(z,t)$ est-elle solution de l'équation des ondes ? Vérifie-t-elle la condition énergétique et en quoi diffère-t-telle de $\underline{\Psi}(z,t)$?

1-3. En superposant un plus grand nombre d'ondes électromagnétiques de fréquences voisines et de même amplitude, on parvient à la notion de « paquets d'ondes » ou « d'ondes quasi-monochromatiques » où les modules des vecteurs d'onde k sont contenus dans un petit domaine Δk de valeur centrale k_0. L'onde résultante de la superposition de p ondes $\underline{\Psi}_p(z,t)=A\,e^{j(\omega_p t-k_p z)}$ sera

$\underline{\Psi}''(z,t)=\sum_p \underline{\Psi}_p(z,t)=A\sum_p e^{j(\omega_p t-k_p z)}$ avec k_p compris dans l'intervalle $\left[k_0-\frac{\Delta k}{2},k_0+\frac{\Delta k}{2}\right]$, ce qui revient à imposer à l'amplitude $A(k)$ une variation représentée sur la **figure 1**.

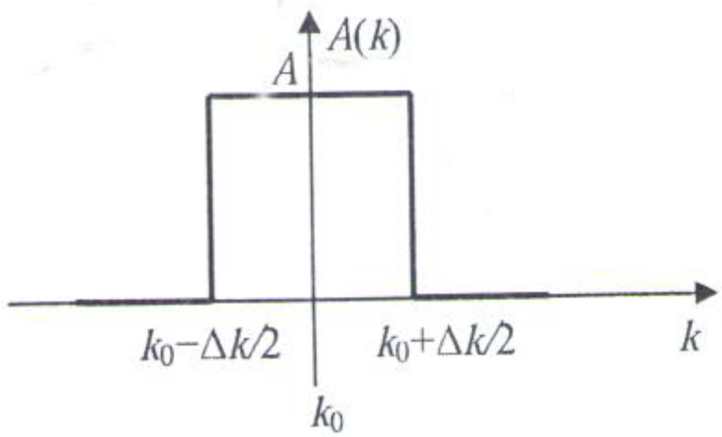

figure 1

En augmentant le nombre des ondes monochromatiques du paquet d'ondes, le module du vecteur d'onde finit par varier continûment sur le domaine d'extension Δk et l'expression de la fonction d'onde devient : $\underline{\Psi}''(z,t)=A\int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2} e^{j(\omega t-kz)}dk$.

a) A l'aide d'un développement limité (à l'ordre 1) de la relation de dispersion $\omega=\omega(k)$ autour de $k=k_0$ avec $\omega_0=\omega(k_0)$, exprimer $\omega(k)$ en fonction de k, k_0, V_φ (vitesse de phase), V_g (vitesse de groupe), vitesses calculées en k_0.

b) En déduire que l'onde quasi-monochromatique s'écrit sous la forme : $\underline{\Psi}''(z,t)=\Psi_0''(z,t)\ e^{j(\omega_0 t-k_0 z)}$ où l'on exprimera $\Psi_0''(z,t)$.

c) Dans $\underline{\Psi}''(z,t)$, quel est le terme qui suscite le caractère monochromatique de l'onde ? Quelle relation doit-il exister entre la constante A et le domaine Δk pour obtenir une condition énergétique physiquement acceptable $\underline{\Psi}''(z,t)$? que peut-on conclure quant à la vitesse V_e de propagation de l'énergie ?

Donnée : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \pi$.

d) Pour une onde quelconque, montrer que V_g peut s'exprimer en fonction de V_φ, ω et $\frac{dV_\varphi}{d\omega}$.

Application :

Dans le cas d'ondes électromagnétiques se propageant dans un guide d'ondes, la vitesse de phase est donnée par la loi de dispersion : $V_\varphi = \frac{c\,\omega}{\left(\omega^2 - c^2a^2\right)^{1/2}}$. Exprimer V_g. Commentaire.

Partie 2. Onde entre deux plans parfaitement conducteurs

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct Oxyz, on définit la base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$. On dispose de deux plans métalliques parallèles au plan yOz et d'équations x = 0 et x = a. Dans l'espace vide entre ces plans conducteurs, on étudie la propagation d'une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω polarisée rectilignement suivant Oy. Suivant le sens de propagation de l'onde, les deux plans métalliques jouent le rôle de « résonateur électromagnétique » **(figure 2)**.

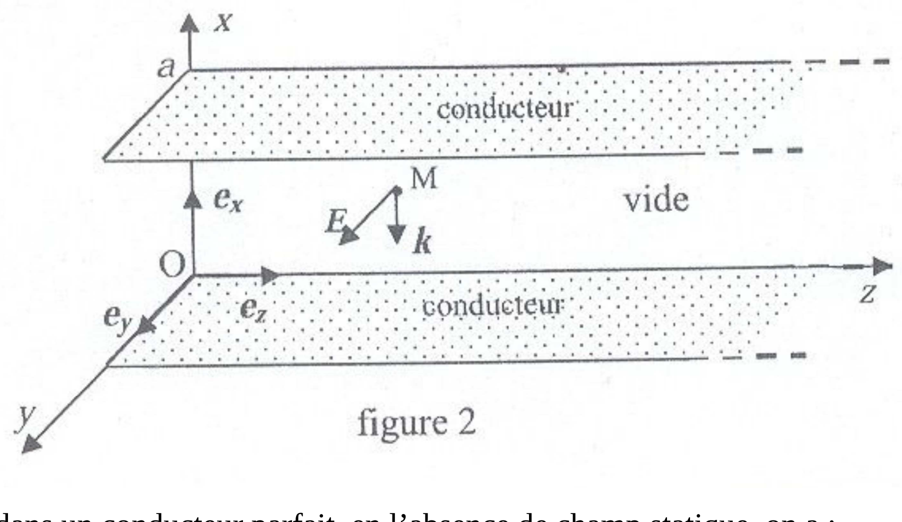

figure 2

2-1. Montrer que dans un conducteur parfait, en l'absence de champ statique, on a :

$\vec{E}=\vec{0}$, $\vec{B}=\vec{0}$, $\vec{j}=\vec{0}$, $\rho=0$. $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$ et ρ désignent respectivement, le champ électrique, le champ magnétique, la densité volumique de courant et la densité volumique de charges.

2-2. Compléter les quatre relations de passage ci-après concernant les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ au niveau de la surface d'équation x = 0 entre le conducteur parfait (milieu 1) et le vide (milieu 2). Les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont indicées T (tangentielles) et N (normales) et on pose σ_s et $\vec{j}_s$ respectivement la densité surfacique de charges et le vecteur densité surfacique de courant.

Relations : (1) $E_{T_2} - E_{T_1} =$ (2) $E_{N_2} - E_{N_1} =$

(3) $B_{T_2} - B_{T_1} =$ (4) $B_{N_2} - B_{N_1} =$

2-3. Montage en « résonateur électromagnétique » (figure 2)

L'onde électromagnétique incidente $\left(\underline{\vec{E}}_i, \underline{\vec{B}}_i\right)$, polarisée rectilignement suivant Oy, se propage vers le métal dans le sens du vecteur d'onde $\vec{k} = -k\ \vec{e}_x$. En notation complexe, $\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{j(\omega t + kx)}\ \vec{e}_y$.

a) Déterminer, à l'aide de l'équation de structure d'une onde plane, le champ $\underline{\vec{B}}_i$.

b) En utilisant les relations de passage des composantes du champ électrique, déterminer le champ $\underline{\vec{E}}_r\left(0,t\right)$ de l'onde réfléchie sur le plan conducteur d'équation x = 0, et en déduire les champs électrique $\underline{\vec{E}}_r$ et magnétique $\underline{\vec{B}}_r$ de l'onde réfléchie en tout point de l'espace.

c) Exprimer le champ électrique total $\underline{\vec{E}}\left(x,t\right)$ et le champ magnétique total $\underline{\vec{B}}\left(x,t\right)$)à l'instant t en un point $M\left(x,y,z\right)$ de la cavité. En déduire le rapport des modules des champs complexes $\frac{E}{B}$ en fonction de c, k et x.

d) Montrer que la fréquence de l'onde dans cette cavité ne peut prendre que des valeurs discrètes f_N exprimées à l'aide de l'entier N.

Les résultats des trois questions suivantes seront exprimées en fonction de ε_0, c, E_0, a et pour N = 1.

e) Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{P}\left(x,t\right)$ de l'onde résultante et en déduire sa moyenne temporelle $\left\langle \vec{P}\left(x,t\right) \right\rangle$. Commenter le résultat.

f) Déterminer la densité volumique d'énergie électromagnétique $u\left(x,t\right)$ puis sa moyenne temporelle $\left\langle u\left(x,t\right) \right\rangle$ en fonction de ε_0 et E_0.

g) Déterminer le vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_s\left(t\right)$ qui parcourt à l'instant t la plaque métallique, à l'interface métal-vide, en x = 0.